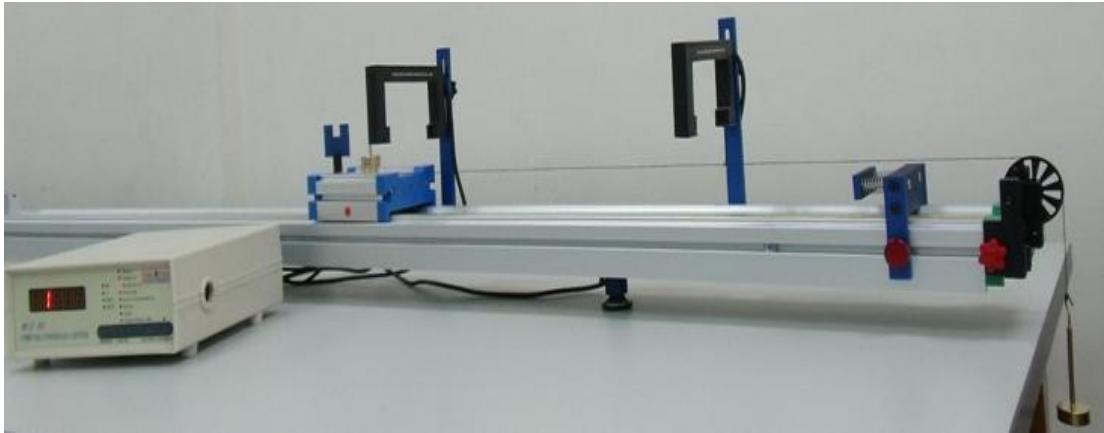


實驗 2：運動體軌跡和相關物理量測量 (含牛頓第二運動定律驗證)

編寫者：戴明鳳、施宙聰、陳聖夫 國立清華大學物理系普物實驗課程團隊，
修改日期：2025/9/14



封面照：運動學實驗系統組裝。

一、目的

善用適當的實驗方法、儀器和裝置，才能完成優質精準的實驗，故本實驗的目的如下：

1. 熟悉光電計時器和光電閘測量儀器的使用技巧和如何獲得精確的測量值。
2. 學習以光電計時器和光電閘測量物體做一維運動時，各種運動物理量隨時間 t 變化的軌跡和趨勢，如運動體的位置、速度、加速度和所受淨力隨時間的變化關係。
3. 學習以數位攝影或錄影方式記錄物體的運動狀況。
4. 學習熟用數位影像位置擷取與數據分析軟體，如 **Tracker** 等軟體。
5. 學習以不同儀器、不同方法量測或紀錄運動體的運動軌跡和運動相關的物理量。
6. 並觀察比較各使用儀器的差異性、優缺點、與所得之實驗數據的精確度。
7. 觀測滑車在外力作用下的一維運動情形，以驗證一維空間的牛頓第二運動定律。

二、原理

牛頓第二運動定律描述：物體運動時的加速度和它所受外力總和的大小成正比，但和物體的質量成反比；運動方程式如下示

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} \quad (1)$$

式中 $\sum \vec{F}_i$ 為物體所受外力的向量和，又稱為總淨力(net force)，為一向量，具有大小和方向。 M 為物體的質量，是一純量，只有大小，沒有方向。 \vec{a} 是物體的加速度，亦為一向量，故含有大小和方向。

本實驗利用下列兩種實驗過程驗證一維空間的牛頓第二運動定律：

- (1) 對質量固定的物體(滑車) M ，施以不同大小的作用力 F ，觀測物體所產生的加速度 a 與作用力間的關係，即觀測 $a(F)$ 的函數關係。
- (2) 固定作用力 F 的大小，改變受力物體的質量 M ，觀測物體所產生的加速度 a 與物體質量 M 間的關係，即觀測 $a(M)$ 的函數關係。

本實驗測量的基本設計如圖 1 所示，將質量為 m 的物體垂直懸掛於架設在軌道一側幾乎無摩擦力的理想滑輪上。因受重力作用，使物體對經滑輪上的傳動線(弦線或繩線)產生一向下的作用力；並經此傳動線，將重力轉成施加位於水平軌道上的小車的作用力，並使用 M 和 m 物體一起產生一加速度運動。相較運動物體的質量 $M + m$ 而言，通常所使用的傳動線質量很輕，可以忽略不計。不考慮方向問題，則運動方程式和加速度大小的理論值分別為

$$\sum_i \bar{F}_i = mg = (M + m)a_{th} \quad \rightarrow \quad a_{th} = \frac{m}{M + m} g$$

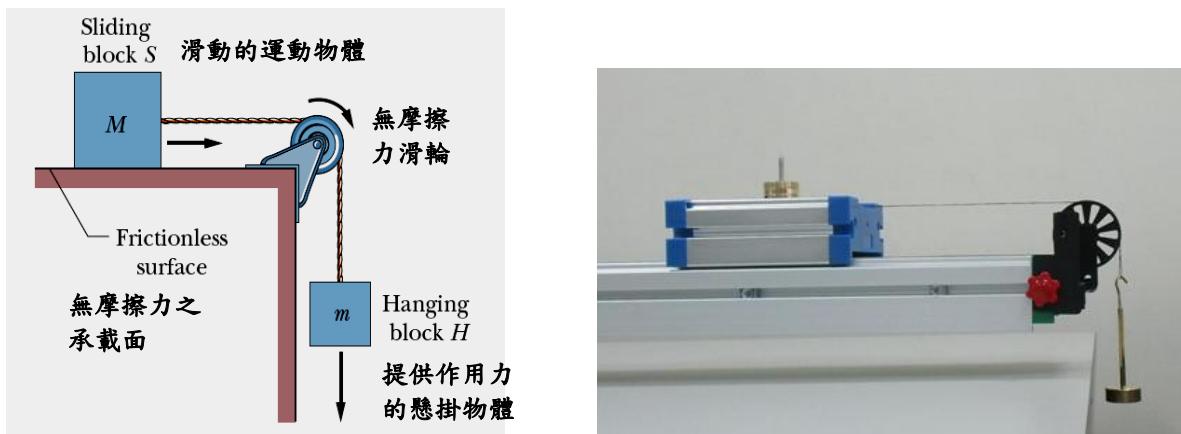
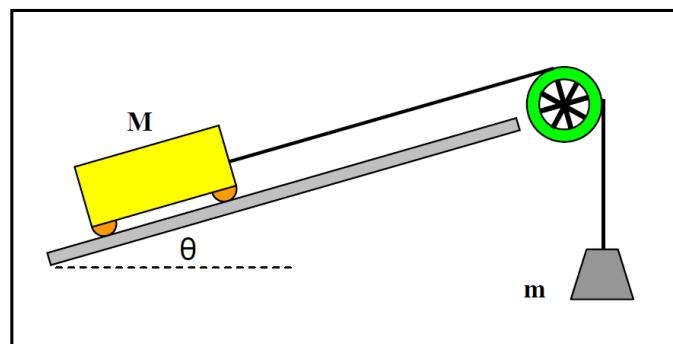


圖 1 驗證一維牛頓第二運動定律的實驗結構示意圖。

斜面運動

在這個實驗中，你將首先利用牛頓運動定律建立斜坡運動模型。實驗裝置如下圖。位於軌道上的未知質量 M 的滑車，通過細線連接到懸掛質量 m 。當滑車被釋放時，滑車加速，你將使用光電閘及光電計時器測量滑車的加速度 a 。軌道傾斜一個小的($\approx 3^\circ$)角度 θ (與水平面夾角)，而摩擦力 f 雖然很小但不可以忽略。實驗的目的為測量：(a) 滑車的質量 M ，(b) 軌道的角度 θ 和 (c) 摩擦力 F_f 。

在所有的測量中，必須盡可能估計誤差，並傳播它們以獲得最終答案的不準度。盡可能將你的數據以表格和圖呈現，並詳細寫下你的實驗步驟。

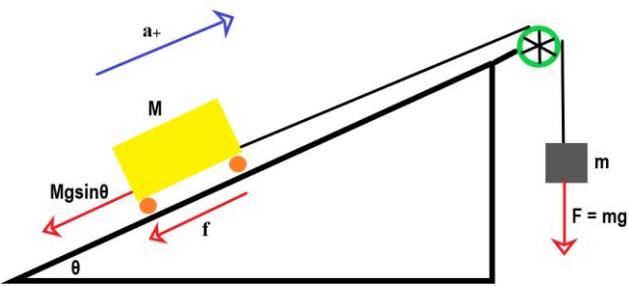


圖一 牛頓第二運動定律斜坡模型裝置示意圖

本實驗對固定質量 M 的物體(滑車)，於滑輪上的傳動線懸掛不同大小的砝碼 m ，施以不同大小的作用力 $F (=mg)$ ，觀測物體所產生的加速度 a 與砝碼質量 m 間的關係，即觀測 $a_{(m)}$ 的函數關係。

根據懸掛砝碼質量 m 的大小，物體(滑車)將會有三種不同的運動方式，以下我們將三種情況分開討論。

(1) 懸掛砝碼質量 m 太大，物體(滑車)沿著斜坡上滑：



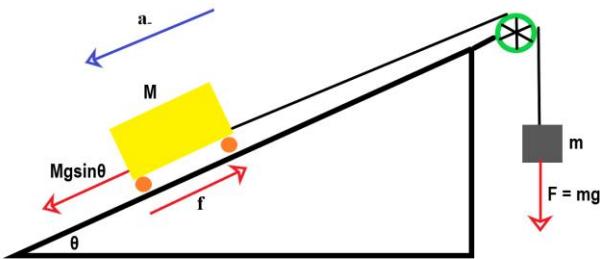
根據牛頓第二運動定律，運動方程式如下式：

$$\sum_i \vec{F}_i = (M + m)a_+ = mg - Mg \sin \theta - f$$

此處 a_+ 僅代表加速度的大小，並不包含方向。 $Mg \sin \theta$ 代表物體(滑車)因重力在斜坡上產生的下滑力， f 代表物體(滑車)在運動過程中，斜坡給予的摩擦力。

(2) 懸掛砝碼質量 m 太小，物體(滑車)沿著斜坡下滑：

根據牛頓第二運動定律，運動方程式如下式：



$$\sum_i \vec{F}_i = (M + m)(-a_-) = Mg \sin \theta - mg - f$$

此處 a_- 僅代表加速度的大小，並不包含方向。 $Mg \sin \theta$ 代表物體(滑車)因重力在斜坡上產生的下滑力， f 代表物體(滑車)在運動過程中，斜坡給予的摩擦力。

(3) 物體(滑車)所受之下滑力 $Mg \sin \theta$ 、外力 F 、摩擦力 f 合力為零，在斜坡上靜止。

歸納上述三種情況，我們可以得到斜坡運動模型，物體(滑車)的加速度 a 與懸掛砝碼質量 m 之函數關係式如下：

$$a_{\pm(m)} = \frac{mg - Mgsin\theta \mp |f|}{M + m}$$

三、器材

每組請自備一台筆記型電腦和一只隨身碟，普物實驗室提供下列四項器材使用：

1. **一維運動軌道系統及配件**：如圖 8 所列。
2. **多功能光電計時/紀錄器**：光電閘式測量系統，可精確測量七種不同運動物理量數據的測量器，見圖 2-圖 5 所示。
3. **影像數據擷取與分析軟體**：可使用 Vernier 公司開發的 Logger Pro 套裝軟體，如圖 7 所示；亦可使用其他功能類似且實驗者自己熟用的軟體(Ex: tracker…)
4. **超音波測距器模組**：使用開放程式碼 Arduino Uno 板+超音波測距器模組。
5. **小光電閘模組**：使用開放程式碼 Arduino Uno 板+光電閘模組+10 幅滑輪組。

四、儀器介紹與使用說明

「工欲善其事，必先利其器！」欲獲得精確的實驗結果，則於實驗前，應先充分瞭解欲使用之各項儀器的設計原理、詳細功能、正確操作方法和使用注意事項等等。如此才能善選適當儀器和正確測量方法，以獲得精確的數據，進而才能獲取正確的實驗結果。

1. 多功能光電計時/紀錄器：詳細儀器規格請見附件一 (先看過)

如圖 2 所示，包含數支光電感應閘和信號連接線。

此實驗用到的是 1 組(2 個)光電閘，利用 **Acceleration**：直線運動體單點瞬時速度測量及雙點間加速度值的計算；數個光電閘，利用 **Timing II**：二次遮光間的時距測量。



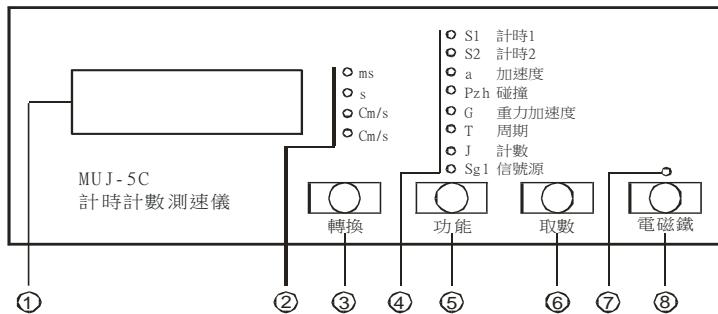
圖 2 永原公司的 MUJ-5C 多功能光電計時器和光電閘(Optolectric gate)。可隨時自行放大圖片，便可清楚觀測右面板上的各項 LED 的指示和下方四個黑色按鍵的功能。

C.面板說明

(1)前面板：如圖 3(a)和 3(b)所示，③、⑤、⑥和⑧等所有按鍵均為循環式的切換開關。



(a) 多功能光電計時器實體照



(b) 前面板示意圖和說明

圖 3 永原公司之(a)MUJ-5C 多功能光電計時器實體照，(b)前面板示意圖和說明。

①五位元 LED 顯示列：顯示測量結果

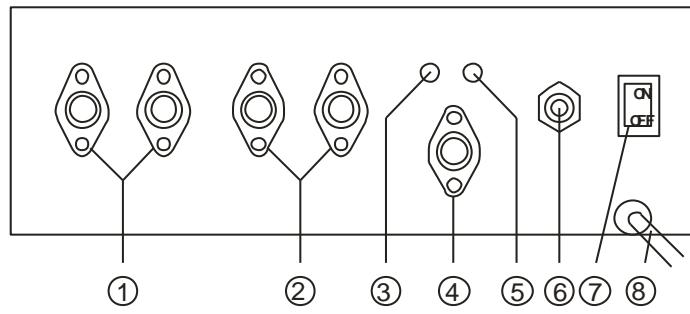
②測量單位指示燈：依所選定的測量功能，顯示所測得之數據的單位，如 ms 與 s 兩個時間單位，和 cm/s 與 cm/s' 兩個速率的單位。

③轉換鍵(Changeover)：當選擇計時、加速度和碰撞等測量功能時，在 1 秒內迅速按轉換鍵，可交替地選擇測量各種不同物理量。

光電閘的檔光片寬度有 1.0cm、3.0cm、5.0cm、10.0cm 等四個不同寬度的選擇，可經由轉換鍵的切換選擇所用之檔光片的寬度。使轉換鍵的切換時間超過 1 sec，即可選擇檔光片的寬度設定。

⑤功能鍵(Function)：如按下功能鍵前，光電閘若遮過光，則可先按一次功能鍵進行歸零。若光電閘沒遮過光，請按功能鍵選擇擬測量的功能。

(1) 後面板插座說明：見圖 4。



- ① P1 光電閘信號插座
② P2 光電閘信號插座
③ 信號源輸出插座
④ 電磁鐵信號插座
⑤ 6V 直流輸出插座
⑥ 電源保險絲座
⑦ 電源開關
⑧ 電源線

圖 4 光電計時器背面板示意圖和說明。

D. 多功能光電計時器使用說明簡表 (詳細操作方式請見附件一)

表 1 多功能光電計時器使用簡表(永原科學儀器公司製造,型號 A04-153&MUJ-5C)

(1) 測量前先按下 Changeover (>1 sec)，選擇所選用之擋光片的寬度 (2) 測量後可迅速(<1 sec)按下 Changeover ，可使顯示器的顯示值切換為時間或速度 (3) 數據顯示後，可按 Function 鍵歸零，重新實驗。歸零後再按一次 Function 鍵，可跳入 下一功能選擇				
功能	應用例	擋光板	光電閘	時間數據顯示(秒/毫秒)
Timing I	拋體初速 轉動週期	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 同一光電門擋光時程/速度 按 Data Fetch 顯示 20 組記錄
Timing II	重物下落 已知高度 時間	■ ■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 以■擋光片得同一光電門兩次擋光的時距 以■擋光片得同一光電門一次擋光的時程--- Changeover 選擇時間 速度--- Changeover 選擇速度 可按 Data Fetch 顯示 20 組記錄
Acceleration	直線等加速度運動	■	由 P1 至 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 選擇時間 P1 的擋光時程 P2 的擋光時程 P1 至 P2 的擋光時程 Changeover 選擇速度 P1 的擋光速度 P2 的擋光速度 P1 至 P2 的加速度
Collision	碰撞運動	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 選擇速度 顯示各光電門各來回 1 至 3 次擋光片之速度 Changeover 選擇時間 顯示各光電門各來回 1 至 3 次擋光片之時間
Gravity Acceleration	自由落體	●	由電磁鐵 至 P1~P4	準備好後，按下 Electromagnet 顯示電磁鐵下端至 P1/P2/P3/P4 的時程
Cycle	單擺 複擺 簡諧運動	● ■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 預設週期數 100 以內。 實驗完顯示總時間，再按 Data Fetch 顯示最後 20 週期時間。 不預設週期數而直接測量直到結束 可顯示測量週期序直到結束。按 Changeover 顯示總時間，再按 Data Fetch 顯示最後 20 週期時間實
Count	轉動次數	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 顯示遮光次數
Signal Source	信號源		輸出插座	<ul style="list-style-type: none"> 按 Changeover 可輸出頻率為：1、10、100、1000、10000 的方波信號，單位為 Hz
DC Power	DC6V		輸出插座	<ul style="list-style-type: none"> 任何時間可輸出

E.操作方法

(1)測量單位：

- (a) ms : 1/1000 秒，計時單位
- (b) s : 秒，計時單位
- (c) m/s : 公分/秒，速度單位
- (d) cm/s² : 公分/秒平方，加速度單位

(2)Time II (計時 2, S₂)：二次遮光時間間距測量

測量光電閘兩次擋光的間隔時間，可連續測量。並自動存入前 20 個數據，按下降取數鍵可查看所量得的數據。

(3)加速度物理量的測量

(b) Acceleration (加速度, *a*)測量

測量帶有凹形擋光片的滑行器通過相鄰兩個光電閘的速度，以及通過此兩光電閘間之段路程所需的時間，可連接 2 至 4 個光電閘。在此測量模態時，本計時器的顯示面板上會循環顯示下列數據：

1	第一個光電管
xxxxx	第一個光電管測量值(T1/V1)
2	第二個光電管
xxxxx	第二個光電管測量值(T2/V2)
1~2	第一至第二光電管
xxxxx	第一至第二光電管測量(T1~2/a)

如接有第 3、4 個光電閘，則除顯示上測量數據外，並繼續顯示第 3 個光電管、第 4 個光電管及 2~3、3~4 段的測量值，如下所列。

3	第三個光電管
xxxxx	第三個光電管測量值(T3/V3)
2~3	第二至第三光電管
xxxxx	第二至第三光電管測量(T2~3/a)
4	第四個光電管
xxxxx	第四個光電管測量值(T4/V4)
3~4	第三至第四光電管
xxxxx	第三至第四光電管測量(T3~4/a)

按功能鍵清“0”，可進行另一系列新的測量。

F.注意事項

- (1) 測量時間小於 1ms 或大於 99.999s，按轉換鍵將之轉換為速率時。顯示 0.0.0.0.表示超出範圍測量。
- (2) 做完實驗後，請關閉儀器電源開關。
- (3) 避免使儀器接近陽光和高溫熱源，以免影響儀器的性能。
- (4) 儀器出現故障，請找專業技術人員修理。

2. 影像紀錄器：可使用具影像儲存和傳輸功能的攝影機、相機或具攝影功能的智慧型手機作為紀錄運動體隨時間移動的器具。

影像數據擷取與分析軟體：可用Tracker或本實驗提供Vernier公司研發的Logger Pro套裝軟體。該軟體，可根據數位影像記錄器(如針孔、照像攝影機、手機的錄影功能錄製影片)。所拍攝下來的影片，將影片中某物體隨時間運動的位置、速率和加速度變化，利用此軟體的對位功能，快速地獲得物體的運動軌跡、速度和加速度隨時間的變化趨勢圖和表格式的數據列組，並可利用最小方差擬合運算技術，求出運動物理量對某變數的最佳函數擬合關係。如圖7的範例所示：

- (1) 圖7中左上方是以攝影機或連拍相機錄得的影像，
- (2) 再利用Logger Pro軟體的影像對位數位化功能，將影像中特定物體(如球體)隨時間變化的位置轉成圖中右上方表格內的座標位置序列。
- (3) 右下方則利用表格內所得的位置數據作圖，清楚地顯示球體之位置隨時間的變化函數。

Logger Pro套裝軟體的功能介紹、軟體下載、線上教學等資訊可參見下列網站：

- (1) 本校版權下載網站：<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/resources.html>
- (2) 軟體介紹網站：<http://www.vernier.com/products/software/lp/>
- (3) 教學網站：<http://www.vernier.com/downloads/logger-pro-demo/>

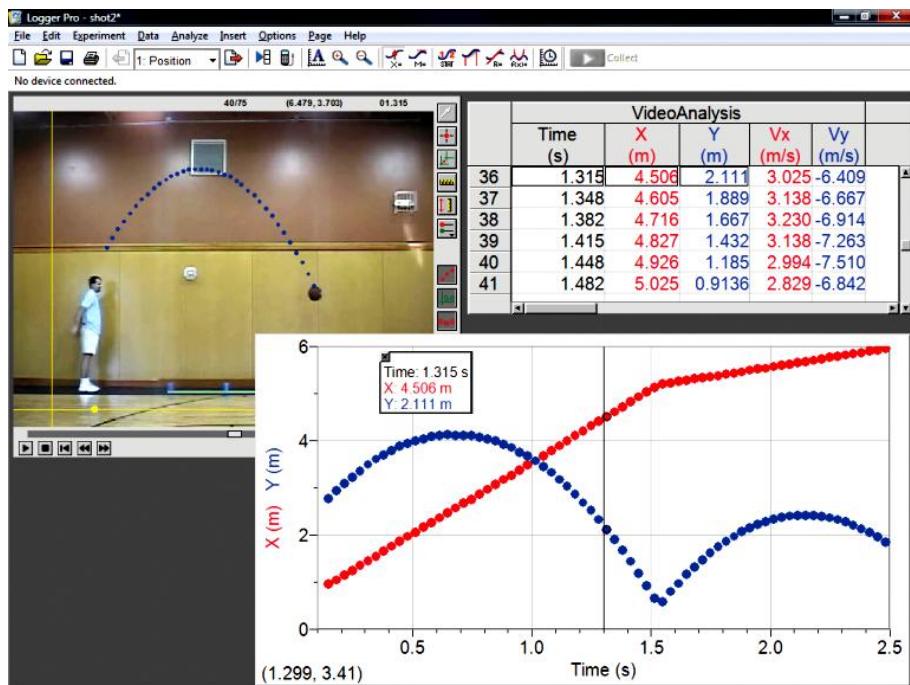


圖 7 Logger Pro 軟體的影像對位數位化功能範例，照片來源：

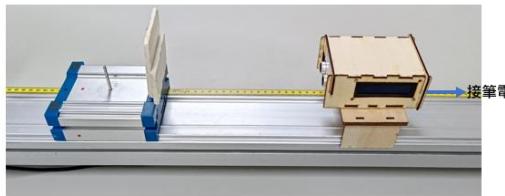
http://www.vernier.com/images/magnify/screenshot.lp_videoanalysis.001.png

- 免費軟體: Tracker (<http://phslets.org/tracker/>)...

Note: Tracker 設定可參考實驗室網頁 “利用攝影(video)分析量測運動軌跡”

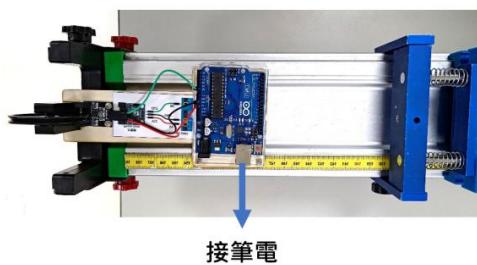
3. Arduino：以超音波測距感測器量測物體的運動情形（可參考實驗室網頁儀器設定說明）

- (1) 利用超音波發射及接收回彈訊號之時間計算距離
- (2) 安裝 CoolTerm 軟體，利用此軟體可讀入序列埠的數據

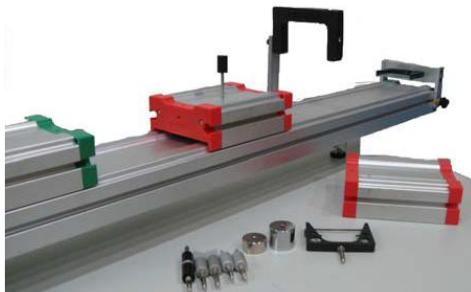


4. Arduino：利用光電閘及滑輪組測距

- (1) 利用小光電閘偵測滑輪遮光時間，紀錄滑輪帶動繩線一圈的長度以換算速度及加速度。
- (2) 將小光電閘置於滑輪下方，確認接線接至 Arduino 板腳位位置無誤，將 Arduino 板接上筆電，開啟 CoolTerm 軟體，利用此軟體可讀入序列埠的數據



5. 軌道與滑車系統規格：如圖 8 所示，包含下列元件規格：



(a)1.6 公尺長軌道和具低磨擦係數滑車



(b)運動軌道的基本附件

圖8 一維鋁質運動軌道和相關配件實體照片

(a)軌道：水平調整腳：利用整軌道底部可調高度的三支點調整軌道的水平。

軌道台面兩側邊具有U型溝槽，可架裝各式相關配件，如可調式擋板架、角度指示器、軌道傾斜安置架、光電閘支架和其他等等器件。

(b)滑車1只：鋁合金材質，重量約400 g，總長約 13 cm

五、實驗步驟：

1. 認識並熟用多功能光電計時器的使用：

- (1) 請先詳細閱讀第三節(第 3-9 頁)光電計時器的使用手冊和前、後面板說明。
- (2) 依此儀器的八項測量功能，自行設計相關的實驗，練習並熟用這八項測量功能：

- (a) Timing I：一般遮光時程測量
- (b) Timing II：二次遮光時距測量
- (c) Acceleration：直線運動體單點瞬時速度測量及雙點間加速度值的 u_8 計算
- (d) Collision：碰撞實驗中，兩運動體碰撞前後的瞬時速度測量
- (e) Gravity Acceleration：自由落體下落至不同高度的時間測量
- (f) Cycle：單擺計次、累計時間、單次擺動週期記錄及顯示
- (g) Count：計數遮光次數
- (h) Signal Source：信號產生器，可供其它實驗使用。

- (3) 請詳細描述八項測量的下列各事項：

- (a) 請詳細說明測量每一項物理量的工作原理
- (b) 詳細描述自行設計的實驗內容和步驟
- (c) 記錄測量到的實驗數據和結果
- (d) 探討哪些因素會影響測量所得之數據的精確度，並說明每一影響因素的權重。
- (e) 探討如何提高測量數據的準確度。

- (4) 請助教或講師驗證您是否已確實孰知光電計時器的使用和八項測量功能。若經確認已熟知此儀器的話，請助教在您的實驗記錄單上簽名。

2. 一維滑車運動軌道架設：

- (1) 熟悉軌道和搭配使用之滑車的結構、功能和應注意的使用事項。

- (2) 軌道水平校正：

- (a) 可經利用整軌道底部可調高度的三支點調整軌道的水平。請「自行設計」，並「進行」軌道水平調整實驗流程及水平精準度的驗證方法。
- (b) 請紀錄下詳細的實驗步驟、軌道水平度驗證方法、您的實驗結果，所用之實驗方法和驗證方式的優缺點。可以繪圖和實驗照片輔助記錄。
- (c) L 長的軌道，在軌道兩端高度差 l ，且無其他人為的外力作用下，使質量為 M 的物體從軌道較高的一端放手，請問物體如何運動？加速度為何？當運動體到達軌道較低的一端會獲得的速度為何？
- (d) 並請以本實驗的實際軌道長度估算上述問題的兩項物理量之數值？
- (e) 請將軌道調整到最好的水平狀態。

- (3) 實驗配件裝置架設：

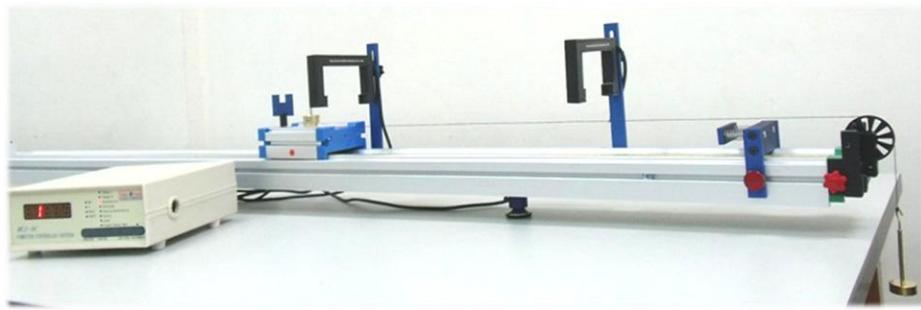
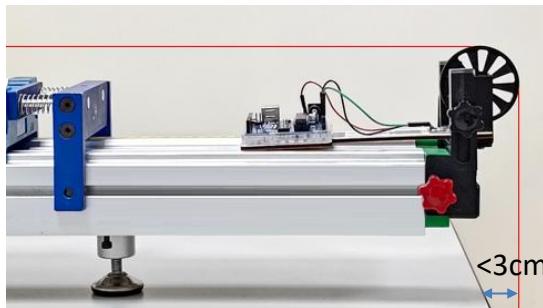


圖 8 實驗配件與裝置架設圖



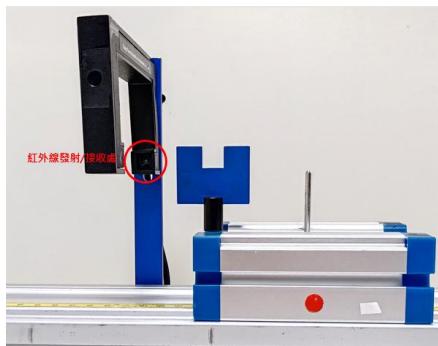
注意：滑輪距桌緣少於 3cm，勿超出過多避免碰撞。

- (a) 參考圖 1 的實驗示意圖，如圖 8 所示，將幾近無摩擦的滑輪安裝於軌道的一側，滑輪前方需裝彈簧擋板；砝碼下方放置水桶避免砝碼下墜時飛散。
- (b) 分別測量滑車、砝碼掛鈎和需用之砝碼的質量，然後以適當長度的細線連接滑車和砝碼掛鈎。
- 注意：(i) 滑車與砝碼掛鈎的連接線必須不具伸縮彈性，且相較滑車和砝碼掛勾的質量，線的質量應可忽略。
(ii) 連接線的長度建議小於 85 cm(桌高)，不可過長，避免砝碼垂直下墜時，撞擊到地面，致使滑車產生回彈的情形。
- (c) 將滑車「輕放」在軌道上，使細線先「平行」沿著軌道的「中線」，拉到跨過軌道側邊所架設的滑輪，再使繫著的砝碼掛鈎垂直懸掛在滑輪下面。請問若沿著軌道的細線無法平行於軌道面的話，會對之後的實驗數據產生怎麼樣的影響。
- (d) 以砝碼掛鈎和加掛其上之砝碼的總質量所產生的總重力作為施加在滑車上的外加作用力。
- (e) 假設滑車的車輪和軌道之間及滑輪和細線之間的磨擦力可忽略不計，細線的質量亦可忽略，請先就理論推導此運動體系的運動狀態、運動軌跡 $x(t)$ 、 $v(t)$ 和 $a(t)$ 等的函數關係。

3. 以光電計時裝置觀測物體的運動狀況---牛頓第二運動定律的初步驗證：

- (1) 利用每組擁有的兩個光電閘，紀錄滑車因外力作用所產生的運動狀況。

Note: 架設光電閘須注意擋板高度，須能使紅外線接收器辨識到擋板遮光間距。



- (2) 先以光電計時器的 **Gravity Acceleration** 測量功能及 U 型檔板記錄運動體在一維的軌道上，滑車之位移 x 隨時間 t 的變化函數關係，即 $x(t)$ 函數。另光電開在同一位置以 **Acceleration** 功能再取得時間，速度及加速度的值。至少須測得 10 組實驗數據組 (x_i, t_i) , $i = 1-10$ ，請列表詳細紀錄實驗所得數據，及以圖形描繪出變化趨勢。並請詳細寫下如何獲得 $x(t)$ 函數的方法。

Note: Acceleration 功能可設定擋板寬度，因採購之檔板間距約為 2.9cm，可視取得數據自行決定是否修正

- (3) 請以所測得的 10 組數據，根據最小方差迴歸擬合法(least square regression)找出實驗數據組的最佳擬合函數關係 $x(t)$ ，並從所得結果判斷滑車做什麼運動？求算出相關的運動物理量。
- (4) 請依所得的最佳擬合函數關係 $x(t)$ ，計算物體經過步驟(1)中 10 個不同實驗位置 (x_i, t_i) , $i = 1-10$ 時，滑車的速度 v 和加速度 a 值，並將計算所得結果併列於步驟(1)的實驗數據紀錄表中。請與上述理論計算所得的結果 $x(t)$ 、 $v(t)$ 和 $a(t)$ 作比較，並估算誤差值。
- (5) 在實驗條件固定的情況下，改變與(1)不同光電計時裝置量測加速度的功能紀錄 5 組取得時間，速度及加速度的值實驗數據組；加上(1)同法測得之數據，以圖形描繪出速度 v 對位置 x 的函數變化趨勢，即 $v(x)$ ，並求算其最佳擬合的函數關係 $v_f(x)$ 。您認為此處所測得的速度是瞬間速度嗎？此法所測得的加速度是瞬間加速度嗎？
- (6) 在實驗條件仍保持不變的情況下，改以光電計時裝置量測加速度的功能，紀錄 10 組 (x_i, a_i) 實驗數據組；請以圖形描繪出位置加速度 a 對 x 的函數變化關係，即 $a(x)$ ，並求算其最佳擬合的函數關係 $a_f(x)$ 。
- (7) ①利用步驟(4)和(5) 所得的實驗數據和擬合函數所得的 $v(x)$ 和 $a(x)$ 關係，推導出物體的運動軌跡 $x(t)$ 函數。計算所得數據亦請併入前述的數據記錄表中，以利之後的比較。
 ②請和步驟(1)和(2)所得的運動軌跡 $x(t)$ 函數做比較。
 ③請詳細描述由此三組不同物理量(時間、速度、加速度)的實驗測量數據所得的運動軌跡 $x(t)$ 函數有何異同之處？您認為哪一種方式所得的運動軌跡 $x(t)$ 最準確？
- (8) 請探討每一實驗步驟中，哪些因數會影響實驗數據的精確度和其影響程度？

4. 以數位攝影裝置觀測物體的運動情形--牛頓第二運動定律的再驗證：

維持與上述步驟 6 完全相同的實驗條件，即滑車質量，砝碼組質量，細線長度與滑車起始位置和起始速度都不變的條件下；但除去光電閘裝置，改以數位攝影裝置，將滑車在軌道上運動的全程影像攝錄下來，並存檔。

(1) 以 Tracker 或 logger pro 分析軟體或使用您熟知的其他類似套裝軟體，將所得的錄影圖像進行一系列的分析，以獲得物體的運動軌跡 $x(t)$ 函數，並經最小方差擬合迴歸分析求算出最佳擬合的軌跡位置隨時間變化的函數關係 $x(t)$ 。

Note: Tracker 設定可參考實驗室網頁 “[利用攝影\(video\)分析量測運動軌跡](#)”

(2) 以前一步驟所得的結果，導出 $v(t)$, $a(t)$ 函數，並與預期的理論計算結果作比較，探討其變化趨勢。計算並描繪出物體所受淨作用力 F 隨時間的變化趨勢 $F(t)$ 。

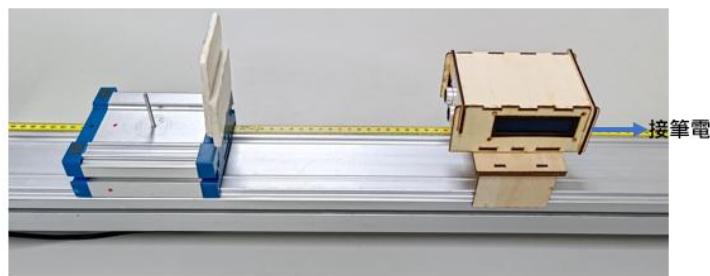
(3) 請探討哪些因素會影響數位攝影方式所得的實驗結果和誤差來源。

(4) 以攝影法所得的所有結果和第 6 步驟以光電閘所測得的數據和導得的各種運動物理量的結果作詳細的比較。你認為兩種測量方法的優缺點分別為何？

5. 以超音波測距感測器量測物體的運動情形 (可參考實驗室網頁儀器設定說明)

(1) 安裝 CoolTerm 軟體，利用此軟體可讀入序列埠的數據

(2) 將 Arduino 測試盒接上筆電，開啟 CoolTerm 軟體，connect 後自動收集資料。

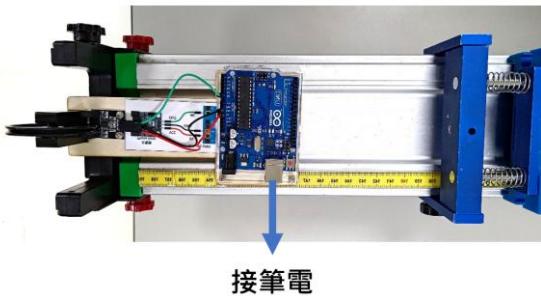


6. 以小光電閘量測物體的運動情形

(1) 安裝 CoolTerm 軟體，利用此軟體可讀入序列埠的數據

(2) 將小光電閘置於滑輪下方，確認接線接至 Arduino 板腳位位置無誤，將 Arduino 板接上筆電，開啟 CoolTerm 軟體，connect 後自動收集資料。

(3) 確認與光電閘偵測方式與滑輪轉動之間的關係(光電閘基板記數時會閃紅燈)。



7. 以驗證牛頓第二定律的運動公式 $F = ma$ --運動系統體總質量固定，觀測作用力大小與運動體之加速度間的關係

- (1) 請利用本實驗所提供的器材和裝置，設計驗證牛頓第二定律之運動公式 $F = ma$ 的實驗流程，至少需含有下列條件的實驗流程，並詳細描述您所設計的實驗流程：
- (a) 當運動物體的質量 m 固定時，測量外加作用力 F 大小與運動物體所產生的加速度 a 大小間的變化關係，即觀測 a 和 F 的函數關係。
 - (b) 當外加作用力 F 固定時，測運動體質量 m 和其所產生的加速度 a 間的變化關係。
- (2) 根據您的實驗設計，進行實驗，並紀錄測量結果。每一函數關係，都必須至少有五組以上的實驗數據，才能推算出足夠精確的擬合函數關係。
- (3) 根據實驗條件和實驗所得數據，探討您的運動結果是否符合牛頓第二定律之運動公式 $F = ma$ ，並探究誤差來源及減小誤差的方法。

7. 測量斜坡運動的加速度

- (1) 將軌道調成斜坡（角度 $\theta \approx 3^\circ$ ）。
- (2) 測量滑車加速度隨砝碼質量 m 的變化。砝碼質量 m 小於 100 g，盡可能在 $0 \text{ g} \leq m \leq 30 \text{ g}$ 測量 20 個以上的數據點。
- (3) 由步驟二數據作圖並求出 (a) 滑車的質量 M ，(b) 軌道的角度 θ 和 (c) 摩擦力 F_f 。
- (4) 將上述結果與直接測量的結果比較，差異應小於 1%。

六、問題：

1. 滑車軌面與滑車間的所產生的摩擦之大小，是否與滑車的速度有關？試述其理由。
2. 試述如何以實驗方法估計軌道與每台滑車間的摩擦力？
3. 如果牛頓第二運動定律的驗證實驗中，若質量改變量太小和太大，對實驗結果分別有何缺點？
4. 所得擬合曲線是否經過原點？原因何在？

七、參考資料：

斜面運動:1. [Turning a Common Lab Exercise into a Challenging Lab Experiment Revisiting the Cart on an Inclined Track](#)

附件一 多功能光電計時/紀錄器

如圖 1 所示，包含數支光電感應閘和信號連接線。具有下列八項測量功能：

- (1) **Timing I**：一般遮光時程測量
- (2) **Timing II**：二次遮光間的時距測量
- (3) **Acceleration**：直線運動體單點瞬時速度測量及雙點間加速度值的計算
- (4) **Collision**：碰撞實驗中，兩運動體碰撞前後的瞬時速度測量
- (5) **Gravity Acceleration**：自由落體下落至不同高度的時間測量
- (6) **Cycle**：單擺計次、累計時間、單次擺動週期記錄及顯示
- (7) **Count**：計數遮光次數
- (8) **Signal Source**：信號產生器，可供其它實驗使用。

在有關物體運動的實驗中經常使用，如觀測物體的直線、圓周、自由落體、碰撞和力學簡諧震盪等各種運動實驗。本學期至少有五個實驗必需用到。



圖 1 永原公司的 MUJ-5C 多功能光電計時器和光電閘(Optolectric gate)。可隨時自行放大圖片，便可清楚觀測右面板上的各項 LED 的指示和下方四個黑色按鍵的功能。

A.光電記錄器簡介

- (1)光電感應閘(管)採紅外線感應作用，具 LED 燈指示；時間感應解析度為 $10 \mu\text{s}$ ，遮光反應寬度 $< 1 \text{ mm}$ 。附電話線暨立體聲雙插頭連接線，用以連接電腦介面傳輸信號。
- (2)以 INTEL MCS-51 高速數位微處理運算器做為自動測量及數據處理系統，測量物體的運動時間、速率和加速率，並具特定實驗模組測量及數據存儲功能。
- (3)以 12 MHz 石英晶體振盪器做時基單元，晶體振盪頻率為 $2 \text{ MHz} \pm 20 \text{ Hz}$ (10 ppm)，故時基精確度高達 $0.5 \mu\text{s}$ (時間測量時基為微秒級)，提供高達五位元的時間測量。
- (4)僅四個功能操作鍵，即可簡單地完成八項不同物理量的測量。
- (5)可作計時器、計數器、信號源和 6V 直流穩壓電源使用，並可用以直接測量運動物體的速率、加速度、重力加速度、周期等物理量。

B.儀器規格

- (1) 0.56" LED 五位元數位顯示，含小數點和單位顯示，滿檔信號以“0.0.0.0.”表示。
- (2) 有四個顯示測量單位和八個指示測量功能的 LED 顯示燈。
- (3) 具量程自動定位、自動換檔及自動四捨五入的智慧化數據處理功能。
- (4) 各項物理量的測量範圍
 - (a) 速率： $0.00 \sim 1000.0 \text{ cm/s}$

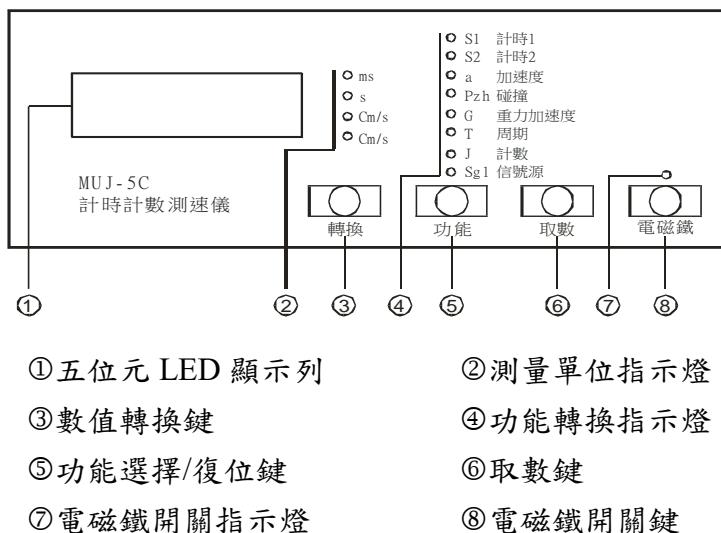
- (b) 加速度： $\pm 0.00 \sim 1200.0 \text{ cm/s}^2$
- (c) 計數： $0 \sim 99999$
- (d) 計時： $0.00 \text{ ms} \sim 999.99 \text{ s}$, 0.01 ms 數量級以上，可確保五位有效數字顯示。
- (5) 可存儲 20 個時間數據，在周期測量中會存儲 21 個時間數據，前 20 個振動周期和一個 n 次(最多 9999 周期)振動的累加時間總和。
- (6) 脈沖信號源有 1Hz、10Hz、100Hz、1000Hz、10000Hz 等五檔，輸出信號振幅約 5V。
- (7) 可提供 6V 直流電壓及 0.5A 的直流穩壓電源輸出。
- (8) 配有四個光電閘信號輸入插座。
- (9) 配有進行斜面運動和自由落體運動實驗時，所需之電磁鐵啟動運動用的控制插座。
- (10) 工作條件：使用 AC110V $\pm 10\%$, 50Hz~60Hz 輸入電源；環境溫度介於-10°C~40°C 間；在 40°C 時，相對濕度低於 85%；可連續工作。

C. 面板說明

- (1) 前面板：如圖 2(a)和 2(b)所示，③、⑤、⑥和⑧等所有按鍵均為循環式的切換開關。



(a) 多功能光電計時器實體照



(b) 前面板示意圖和說明

圖 2 永原公司之(a)MUJ-5C 多功能光電計時器實體照，(b)前面板示意圖和說明。

①五位元 LED 顯示列：顯示測量結果

②測量單位指示燈：依所選定的測量功能，顯示所測得之數據的單位，如 ms 與 s 兩

個時間單位，和 cm/s 與 cm/s 兩個速率的單位。

③**轉換鍵(Changeover)**：當選擇計時、加速度和碰撞等測量功能時，在 1 秒內迅速按轉換鍵，可交替地選擇測量各種不同物理量。

光電閘的檔光片寬度有 1.0cm、3.0cm、5.0cm、10.0cm 等四個不同寬度的選擇，可經由轉換鍵的切換選擇所用之檔光片的寬度。使轉換鍵的切換時間超過 1 sec，即可選擇檔光片的寬度設定。

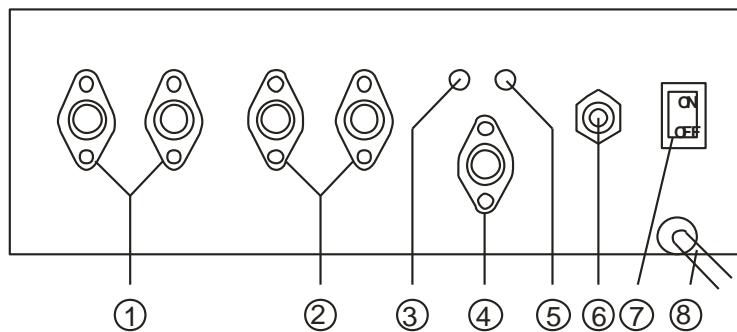
⑤**功能鍵(Function)**：如按下功能鍵前，光電閘若遮過光，則可先按一次功能鍵進行歸零。若光電閘沒遮過光，請按功能鍵選擇擬測量的功能。

⑥**取數鍵(Data Fetch)**：在計時 1(S_1)、計時 2(S_2)、周期(T)功能時，儀器可自動存入前 20 個測量值，按下取數鍵，可顯示存入的紀錄值。當顯示「En」表示將顯示存入的第 n 值。

⑦**電磁鐵開/關指示燈**：顯示電磁鐵處於吸合或鬆離的狀態，當紅色 LED 亮時，表示電磁鐵為開啟的吸合狀態；LED 不亮時，則表示電磁鐵為關閉狀態。

⑧**電磁鐵開關鍵(Electromagnet)**：控制電磁鐵的吸合和鬆離(鍵上⑦LED 顯示暗)的切換鍵，當按鍵上的⑦電磁鐵開/關紅色 LED 指示燈亮時，表示有電磁鐵為開啟的吸合狀態；LED 不亮時，則表示電磁鐵為關閉，處於無電磁力的狀態。

(2) 後面板插座說明：見圖 3。



- | | |
|-------------|-------------|
| ①P1 光電閘信號插座 | ②P2 光電閘信號插座 |
| ③信號源輸出插座 | ④電磁鐵信號插座 |
| ⑤6V 直流輸出插座 | ⑥電源保險絲座 |
| ⑦電源開關 | ⑧電源線 |

圖 3 光電計時器背面板示意圖和說明。

D. 多功能光電計時器使用說明簡表

表 1 多功能光電計時器使用簡表(永原科學儀器公司製造,型號 A04-153&MUJ-5C)

<p>(4) 測量前先按下 Changeover (>1 sec)，選擇所選用之擋光片的寬度</p> <p>(5) 測量後可迅速(<1 sec)按下 Changeover，可使顯示器的顯示值切換為時間或速度</p> <p>(6) 數據顯示後，可按 Function 鍵歸零，重新實驗。歸零後再按一次 Function 鍵，可跳入下一功能選擇</p>				
功能	應用例	擋光板	光電閘	時間數據顯示(秒/毫秒)
Timing I	拋體初速 轉動週期	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 同一光電門擋光時程/速度 按 Data Fetch 顯示 20 組記錄
Timing II	重物下落 已知高度 時間	■ ■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 以■擋光片得同一光電門兩次擋光的時距 以■擋光片得同一光電門一次擋光的時程--- Changeover 選擇時間 速度--- Changeover 選擇速度 可按 Data Fetch 顯示 20 組記錄
Acceleration	直線等加速度運動	■	由 P1 至 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 選擇時間 P1 的擋光時程 P2 的擋光時程 P1 至 P2 的擋光時程 Changeover 選擇速度 P1 的擋光速度 P2 的擋光速度 P1 至 P2 的加速度
Collision	碰撞運動	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 選擇速度 顯示各光電門各來回 1 至 3 次擋光片之速度 Changeover 選擇時間 顯示各光電門各來回 1 至 3 次擋光片之時間
Gravity Acceleration	自由落體	●	由電磁鐵至 P1~P4	<p>準備好後，按下 Electromagnet 顯示電磁鐵下端至 P1/P2/P3/P4 的時程</p>
Cycle	單擺 複擺 簡諧運動	● ■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> Changeover 預設週期數 100 以內。 實驗完顯示總時間，再按 Data Fetch 顯示最後 20 週期時間。 不預設週期數而直接測量直到結束 可顯示測量週期序直到結束。按 Changeover 顯示總時間，再按 Data Fetch 顯示最後 20 週期時間實
Count	轉動次數	■	P1 或 P2	<ul style="list-style-type: none"> 顯示遮光次數
Signal Source	信號源		輸出插座	<ul style="list-style-type: none"> 按 Changeover 可輸出頻率為：1、10、100、1000、10000 的方波信號，單位為 Hz
DC Power	DC6V		輸出插座	<ul style="list-style-type: none"> 任何時間可輸出

E.操作方法

(1)測量單位：

- (b) ms : 1/1000 秒，計時單位
- (c) s : 秒，計時單位
- (d) m/s : 公分/秒，速度單位
- (e) cm/s² : 公分/秒平方，加速度單位

(2)八項物理量的測量

(a) Timing I (計時 1, S₁)：遮光時程測量

測量光電閘的擋光時間，可連續測量，並自動存入前 20 個所測得的數據。按下取數鍵可查看儲存於計數器內的數據。

(c) Time II (計時 2, S₂)：二次遮光時間間距測量

測量光電閘兩次擋光的間隔時間，可連續測量。並自動存入前 20 個數據，按下取數鍵可查看所量得的數據。

(d) Acceleration (加速度, a)測量

測量帶有凹形擋光片的滑行器通過相鄰兩個光電閘的速度，以及通過此兩光電閘間之段路程所需的時間，可連接 2 至 4 個光電閘。在此測量模態時，本計時器的顯示面板上會循環顯示下列數據：

1	第一個光電管
xxxxx	第一個光電管測量值(T1/V1)
2	第二個光電管
xxxxx	第二個光電管測量值(T2/V2)
1~2	第一至第二光電管
xxxxx	第一至第二光電管測量(T1~2/a)

如接有第 3、4 個光電閘，則除顯示上測量數據外，並繼續顯示第 3 個光電管、第 4 個光電管及 2~3、3~4 段的測量值，如下所列。

3	第三個光電管
xxxxx	第三個光電管測量值(T3/V3)
2~3	第二至第三光電管
xxxxx	第二至第三光電管測量(T2~3/a)
4	第四個光電管
xxxxx	第四個光電管測量值(T4/V4)
3~4	第三至第四光電管
xxxxx	第三至第四光電管測量(T3~4/a)

按功能鍵清“0”，可進行另一系列新的測量。

(e) Collision (碰撞, Pzh)：等質量與不等質量間的碰撞實驗測量

在計時器後面板的 P1、P2 接頭各接一只光電管，兩只滑行器上裝好相同寬度的凹形擋光片和碰撞彈簧，讓滑行器從氣軌兩端向中間運動，各自通過一個光電

閘後相撞。

做完實驗，會循環顯示下列數據：

P1.1	第一次通過 P1 光電管
xxxxx	第一次通過 P1 光電管的遮光時間測量值
P1.2	第二次通過 P1 光電管
xxxxx	第二次通過 P1 光電管的遮光時間測量值
P2.1	第一次通過 P2 光電管
xxxxx	第一次通過 P2 光電管的遮光時間測量值
P2.2	第二次通過 P2 光電管
xxxxx	第二次通過 P2 光電管的遮光時間測量值

①如滑塊通過 P1 光電管三次，但僅通過 P2 光電管一次，則計時器將不顯示 P2.2 而顯示 P1.3，表示物體第三次通過 P1 光電管的第三次遮光時間。

②如滑塊通過 P2 光電管三次，通過 P1 光電管一次，本機將不顯示 P1.2 而顯示 P2.3，表示第三次通過 P2 光電管的第三次遮光時間。

③按功能鍵歸零後，可進行另一系列新的測量。

(f) Gravity Acceleration (重力加速, g) :

將電磁鐵插入電磁鐵插口，2~4 個光電閘插入光電閘插口，電磁鐵開關鍵上方發光管亮時，吸上小鋼球(待測物體)；按電磁鐵開關鍵，小鋼球下落(同步計時)，到小鋼球前沿遮住光電閘(計錄時間)，計時器陸續顯示物體從開始下落至通過第 n 個光電閘所經歷的時間：

1	第一個光電管
xxxxx	t_1 值(物體開始下落至通過第一個光電閘所經歷的時間)
2	第二個光電管
xxxxx	t_2 值(物體開始下落至通過第二個光電閘所經歷的時間)
3	第三個光電管
xxxxx	t_3 值(物體開始下落至通過第三個光電閘所經歷的時間)
4	第四個光電管
xxxxx	t_4 值(物體開始下落至通過第四個光電閘所經歷的時間)

因 $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ ， $h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$ ，故有 $g_1 = \frac{2(h_2 - h_1)}{t_2^2 - t_1^2}$ ， $(h_2 - h_1)$ 為第一個和第二個光電閘之間的距離。

$$g_3 = \frac{2(h_4 - h_1)}{t_4^2 - t_1^2}, \quad g_2 = \frac{2(h_3 - h_1)}{t_3^2 - t_1^2}$$

兩光電閘間的設定距離愈大，則測量誤差越小。按功能鍵或按電磁鐵開關鍵，儀器可自動歸零，使電磁鐵重新吸合。重力加速度的測量方法，也可用計時 2(S₂)) 的功能測量。

(g) Cycle (周期, T) :

測量單擺振子或彈簧振子 1~9999 周期的時間。一只光電閘插入光電閘插口，可選用以下二種方法。

- ① 不設定周期數：在週期數顯示為 0 時，每完成一個周期，顯示周期數會加 1。按下轉換鍵即停止測量。在顯示最後一個周期數約 1 秒後，將接著顯示累計時間值。
- ② 設定周期數：按下轉換鍵不放，確認到您所需周期數時放開此鍵即可。(只能設定 100 以內的周期數。) 每完成一個周期，顯示周期數會自動減 1，當最後一次遮光完成，顯示累計時間值。

按取數鍵可顯示本次實驗(最多前 20 個周期)每個周期的測量值，如顯示 E2(表示第二個周期)，xxxxx(第二個周期的時間)...。

(a) **Count (計數, J) :** 測量光電閘的遮光次數

(b) **Source Signal (信號源, Sg1) :** 將信號源輸出插頭，插入信號源輸出插口，可輸出頻率為：1 Hz、10 Hz、100 Hz、1000 Hz、10000 Hz 的信號，按轉換鍵可切換信號的頻率選擇。

F. 自動檢測、調整和維護

- (1) 具自動檢測功能，按住取數鍵不放，再開啟電源開關，數碼管顯示“22222”、“55555”，發光二極管全亮，顯示 20.47ms，說明儀器程序，光電閘輸入工作正常。若出現無計時功能，請檢查光電閘是否正常。
- (2) 存放時間滿 6 個月，應拿出通電 1 小時。

G. 注意事項

- (5) 測量時間小於 1ms 或大於 99.999s，按轉換鍵將之轉換為速率時。顯示 0.0.0.0. 表示超出範圍測量。
- (6) 做完實驗後，請關閉儀器電源開關。
- (7) 避免使儀器接近陽光和高溫熱源，以免影響儀器的性能。
- (8) 儀器出現故障，請找專業技術人員修理。

H. 光電閘結構：如圖 5 所示。